**XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**

**Решения заданий заключительного этапа, 2 день**

**5**. *В выпуклом пятиугольнике ABCDE диагонали AD и CE пересекаются в точке X. Оказалось, что ABCX — параллелограмм и BD = CX; BE = AX. Докажите, что AE = CD.* (С. Берлов)

**Первое решение**. Заметим, что *AB* = *CX* = *BD*; *BC* = *AX* = *BE* и Ð*ABD* = 180°–2Ð*BAD* = 180°–2Ð*BCE* = Ð*CBE*, откуда Ð*ABE* = Ð*CBD*. Следовательно, треугольники *ABE* и *DBC* равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому *AE* = *CD*. **Второе решение**. Проведем отрезок *BX*. У трапеции *ABXE* равны диагонали *AX* и *BE*, поэтому она — равнобедренная, то есть *AE* = *BX*. Аналогично из равнобедренной трапеции *BCDX* получаем *CD* = *BX*. Следовательно, *AE* = *BX* = *CD*.

**6**. *Докажите, что для любого целого неотрицательного числа k, не превосходящего* *, существуют такие 2022 числа, что все их*  *попарные суммы различны и среди этих сумм ровно k положительных.* (И. Рубанов, С. Берлов, Л. Самойлов)

**Решение**. Для *k* = 2022⋅2021/2 возьмём числа 2, 22, …, 22022. Все их попарные суммы различны: если бы выполнялось равенство 2*a*+2*b* = 2*c*+2*d*, то, поделив его на наименьшую из входящих в него степеней двойки, мы получили бы, что чётное число равно нечётному. Пусть теперь 0 ≤ *k* < 2022⋅2021/2. Упорядочим все попарные суммы наших степеней двойки по убыванию: *s*1 > *s*2 > … > *s*2022⋅2021/2 — и вычтем из всех этих степеней двойки по *sk*+1/2. Все попарные суммы при этом уменьшатся на *sk*+1, и положительными останутся в точности первые *k* сумм.

**7**. *Положительные числа a, b, c и d не превосходят единицы. Докажите неравенство* . (А. Храбров)

**Решение**. Положим *s* = (*a*+*b*+*c*+*d*)/4 Так как 0 ≤ *a, b, c d* ≤ 1, выполнено неравенство *a*2+*b*2+*c*2+*d*2 **≤***a*+*b*+*c*+*d*. Далее, верно неравенство (1–*a*)(1–*b*) ≤ (1–(*a*+*b*)/2)2, сводящееся после преобразований к очевидному неравенству 0 ≤ (*a*–*b*)2/4. Поэтому
(1–*a*)(1–*b*)(1–*c*)(1–*d*) ≤ (1–(*a*+*b*)/2)2(1–(*c*+*d*)/2)2 ≤ (1–*s*)4. Значит, нам достаточно доказать неравенство 1/4*s* ≥ 1/4+(1–*s*)4. После домножения обеих его частей на 4*s*, переноса всех выражений в левую часть и вынесения за скобки 1–*s* получаем
(1–*s*)(4*s*(1–*s*)3–1) ≤ 0, что верно, ибо *s* ≤ 1 и 4*s*(1–*s*)3 = 4*s*(1–*s*)(1–*s*)2 ≤ 4⋅(1/4)(1–*s*)2 ≤ 1.

**8**. *В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.* (М. Антипов)

**Решение**. Подсчитаем, сколько пар общих знакомых у каждой пары кружковцев, т. е. сколько в графе знакомств существует циклов длины 4 с этими двумя противоположными вершинами. При этом каждый цикл длины 4 будет учтён дважды, поэтому сумма всех полученных результатов подсчёта будет чётна. Допустим, утверждение задачи неверно. Тогда у каждой пары участников кружка либо 10, либо 11 общих знакомых. В первом случае у них будет 10⋅9/2 = 45, а во втором — 11⋅10/2 = 55 пар общих знакомых. При этом всего пар участников кружка имеется 42⋅41/2 =21⋅41, и получается, что сумма всех результатов подсчёта нечётна как сумма нечётного числа нечётных слагаемых. Противоречие.